1

Resolver el sistema: a) $\left.\begin{array}{r} x+y-6=-z \\ \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{2y-z}{2}=y+1 \\ 3(x+z)=y-2 \end{array}\right\}$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ x+y-z=2 \\ 3x-y+3z=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3=F_3-3F_1]{F_2=F_2+F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & -4 & 0 & -20 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 2x+2y=8 \\ -4y=-20 \end{array}\right\}$$

$-4y=-20 \rightarrow y=5$
$2x+10=8 \rightarrow x=-1$
$-1+5+z=6 \rightarrow z=2$

Sistema compatible determinado
solución única: $\boxed{R./\ (-1,5,2)}$

Resolver el sistema:

b) $\left.\begin{array}{r} \sqrt{3(x+y)}+x=12 \\ 2x-y=6 \end{array}\right\} \rightarrow y=2x-6$

$\sqrt{3x+3y}+x=12 \rightarrow \sqrt{3x+6x-18}=12-x$

$\sqrt{9x-18}=12-x \rightarrow \left(3\sqrt{x-2}\right)^2=(12-x)^2$

$9(x-2)=144+x^2-24x \rightarrow -x^2+33x-162=0$

$x^2-33x+162=0 \rightarrow x=\dfrac{33\pm\sqrt{1089-648}}{2}$

$x=\dfrac{33\pm\sqrt{441}}{2}=\begin{cases} \cancel{x=27} \rightarrow \text{No vale} \\ x=6 \rightarrow y=6 \end{cases}$

$\boxed{R./\ (6,6)}$

Resolver el sistema:

c) $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=65 \\ xy=28 \end{array}\right\} \rightarrow x=\dfrac{28}{y}$

$\left(\dfrac{28}{y}\right)^2+y^2=65 \rightarrow \dfrac{784}{y^2}+y^2=65$

$784+y^4=65y^2 \rightarrow y^4-65y^2+784=0$

$cambio:\ y^2=t$

$t^2-65t+784=0 \rightarrow t=\dfrac{65\pm\sqrt{4225-3136}}{2}$

$t=\dfrac{65\pm\sqrt{1089}}{2}=\begin{cases} t_1=49 \\ t_2=16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=7\ ;\ y=-7 \\ y=4\ ;\ y=-4 \end{cases}$

$\boxed{R./\ (4,7);(-4,-7);(7,4);(-7-4)}$

Resolver el sistema:

d) $\left.\begin{array}{r} 5^x\cdot 5^y=1 \\ \dfrac{5^x}{5^y}=25 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 5^{x+y}=5^0 \\ 5^{x-y}=5^2 \end{array}\right\}$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+\cancel{y}=0 \\ x-\cancel{y}=2 \\ 2x\quad=2 \end{array}\right\} \rightarrow x=1\ ;\ y=-1 \quad \boxed{R./\ (1,-1)}$

2

Resolver la inecuación: a) $x(x+5)>2x^2$

$x^2+5x-2x^2>0$
$-x^2+5x>0$
$x(5-x)>0$
$x=0\ ;\ x=5$

$-\quad+\quad-$

$0\quad 5$

$\therefore S=(0,5)$

Vemos que la ecuación $-x^2+5x=0$ tiene dos soluciones que dividen a la recta en tres intervalos, los externos tienen el mismo signo que el coeficiente de x^2, es decir, negativo en este caso, y contrario en el interno.

Resolver la inecuación: b) $x^3-x^2-4x+4<0$

Descomponemos en factores el polinomio asociado

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$\rightarrow (x-1)(x^2-4)<0$

$\rightarrow (x-1)(x+2)(x-2)<0$

$x-1\geq 0$ | $x+2\geq 0$ | $x-2\geq 0$

$\boxed{x\geq 1}$ | $\boxed{x\geq -2}$ | $\boxed{x\geq 2}$

$\therefore\ S=(-\infty,-2)\cup(1,2)$

$S=\{x/x<-2 \vee 1<x<2\}$

Tabla de signos

		-2		1		2	
$(x-1)$	$-$		$-$		$+$		$+$
$(x+2)$	$-$		$+$		$+$		$+$
$(x-2)$	$-$		$-$		$-$		$+$
producto	$-$		$+$		$-$		$+$
inecuación							

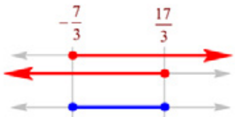
Fijándonos en la inecuación propuesta, los intervalos solución son los negativos.

3

Resolver la inecuación: a) $|5-3x| \le 12$

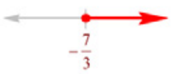
Esta inecuación es equivalente al sistema (intersección)

$$\left.\begin{array}{l} 5-3x \le 12 \\ 5-3x \ge -12 \end{array}\right\}$$



$\therefore\ S = \left[-\frac{7}{3}, \frac{17}{3}\right]$

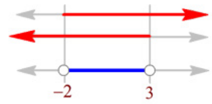
$5-3x \le 12$	y	$5-3x \ge -12$
$-3x \le 7$		$-3x \ge -17$
$3x \ge -7$		$3x \le 17$
$x \ge -\frac{7}{3}$		$x \le \frac{17}{3}$



Resolver la inecuación: c) $4x+1 < x+10 < 3x+14$

Esta inecuación es equivalente al sistema (intersección)

$$\left.\begin{array}{l} x+10 < 3x+14 \\ 4x+1 < x+10 \end{array}\right\}$$



$x+10 < 3x+14$	y	$4x+1 < x+10$
$-2x < 4$		$3x < 9$
$2x > -4$		$\boxed{x < 3}$
$\boxed{x > -2}$		

$\therefore\ S = (-2, 3)$

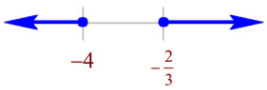
$\boxed{4x+1 < x+10} < 3x+14$ — 2ª inecuación

$4x+1 < \boxed{x+10 < 3x+14}$ — 1ª inecuación

Resolver la inecuación: b) $|3x+7| \ge 5$

Esta inecuación es equivalente a la colección (unión)

$$\left.\begin{array}{l} 3x+7 \ge 5 \\ 3x+7 \le -5 \end{array}\right]$$



$\therefore\ S = (-\infty, -4] \cup \left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$

$3x+7 \ge 5$	ó	$3x+7 \le -5$
$3x \ge -2$		$3x \le -12$
$x \ge -\frac{2}{3}$		$x \le -4$

Resolver la inecuación: d) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} \ge -1$

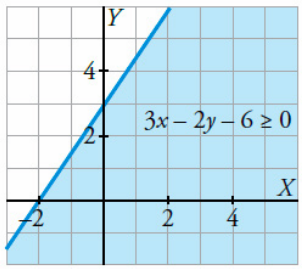
$3x - 2y + 6 \ge 0$

$\rightarrow$ dibujamos la recta $r: 3x - 2y + 6 = 0$

Tomamos el punto $O(0,0) \notin r$, sustituimos en la inecuación y comprobamos que se verifica la desigualdad $0 - 0 + 6 \ge 0$

La solución es el semiplano que contiene al punto O

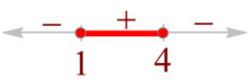
Los puntos de la recta frontera también son solución.

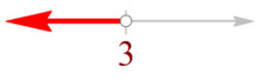


4

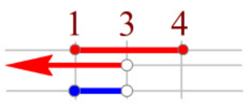
Resolver: a) $\left.\begin{array}{l} 5x - x^2 \ge 4 \\ 5x - 1 < 4x + 2 \end{array}\right\}$

$5x - x^2 \ge 4$	$5x - 1 < 4x + 2$
$\boxed{-x^2 + 5x - 4 \ge 0}$	$x < 3$
$-x^2 + 5x - 4 = 0$	
$x^2 - 5x + 4 = 0$	
$\cdots$ *resolvemos la ec.*	
$x = 1\ ;\ x = 4$	





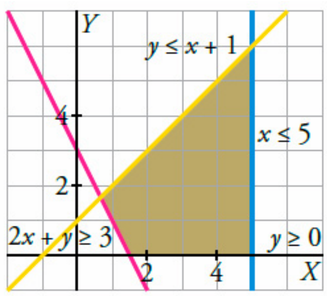
La solución es la intersección de las soluciones de las dos inecuaciones



$\therefore\ S = [1, 3)$

Resolver

b) $\left.\begin{array}{r} x \le 5 \\ y \ge 0 \\ y \le x+1 \\ 2x+y \ge 3 \end{array}\right\}$



- Resolvemos cada una de las inecuaciones como en el ejercicio 3.d).
- Trazamos las rectas y comprobamos los semiplanos solución tomando puntos de comprobación apropiados (que no pertenezcan a la recta).
- El recinto solución es la intersección de los cuatro semiplanos.

5

Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kilos por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilos compró?

1 Planteamiento

Compra → x kg a y € / kg

Desecha 20kg → $(x-20)$ kg

Aumenta 0,40 € → $(y+0,4)$ €/kg

Como el gasto es: (kilos × precio)

→ planteamos un sistema

2 Resolución

$$\left.\begin{aligned} x\cdot y &= 125 \\ (x-20)\cdot(y+0,4) &= 147 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= \frac{125}{y} \\ xy+0.4x-20y &= 155 \end{aligned}\right\}$$

$$y\cdot\frac{125}{y}+0.4\cdot\frac{125}{y}-20y=155 \rightarrow 125+\frac{50}{y}-20y=155$$

$$125y+50-20y^2=155y \rightarrow -20y^2-30y+50=0$$

$$2y^2+3y-5=0 \rightarrow y=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}=\begin{cases} y=1 \rightarrow x=125 \\ y=\cancel{-\frac{5}{2}} \rightarrow \textit{No vale} \end{cases}$$

$\boxed{R./\ \text{compró}\ \ 125\,\text{kg}}$

6

En la primera prueba de una oposición queda eliminado el 52 % de los participantes. En la segunda prueba se elimina el 25 % de los restantes. Si el número total de personas suspendidas es 864, ¿cuántas personas se presentaron a la oposición?

1 Planteamiento

Se presentan → x *participantes*

1ª Prueba → eliminados 52% → quedan $0,48x$

2ª Prueba → eliminados 25% → quedan $0,75\cdot(0,48x)$

Como quedan $0,36x$ → los suspensos serán $0,64x$

Además sabemos que los suspensos totales son: 864

→ planteamos una ecuación

2 Resolución

$$0,64x=864 \rightarrow x=\frac{864}{0.64}=1350$$

$\boxed{R./\ 1.350\ \textit{total de participantes}}$