ECUACIONES

Ciertos problemas reales permiten ser traducidos al lenguaje algebraico mediante una expresión numérica llamada ecuación, en la que una o más cantidades son desconocidas.

Igualdad: expresión matemática unida por el signo igual (=).
Una igualdad puede ser cierta o falsa. Hay varios tipos:

- *Identidad numérica*: es una igualdad entre números que es cierta. *p.ej.* $7+2=10-4+3$
- *Identidad literal*: es una igualdad que es cierta (se verifica) para cualquier valor que demos a las letras.
  p.ej. $(x+3)^2 = x^2+9+6x \to 0x=0 \Rightarrow \infty$ *soluciones*
- *Ecuación*: es una igualdad literal que se verifica para algunos valores determinados de las letras.
  p.ej. $x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2 \vee x=3$

– *Soluciones de una ecuación:*
Se llama **solución** o **raíz** de una ecuación a aquellos valores que al sustituirlos en la ecuación la transforman en una identidad numérica.

– *Resolver una ecuación:*
Es hallar el conjunto de todas sus soluciones.

– *Comprobar una ecuación:*
Es sustituir las letras (llamadas incógnitas o variables) por las soluciones y ver si verifica (es cierta) la ecuación.

$$\text{Ecuación algebraica:}\quad a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=0$$

Ecuaciones equivalentes: $\Leftrightarrow$
Dos ecuaciones son equivalentes, si coinciden los conjuntos de todas sus soluciones o ambas no tienen solución.

CRITERIOS DE EQUIVALENCIA

I. Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta un mismo número o expresión algebraica, resulta otra ecuación equivalente a la dada.
   - Transposición de términos
   - Simplificación de términos
II. Si a los dos miembros de una ecuación se les multiplica por un mismo número no nulo o por una expresión algebraica que no admita ninguna raíz real, resulta otra ecuación equivalente a la dada.
III. Si a los dos miembros de una ecuación se les divide por un mismo número no nulo o por una expresión algebraica cuyas raíces no pertenecen a la dada, resulta otra ecuación equivalente a la primera.

Debemos tener cuidado con los criterios II y III al multiplicar o dividir por una expresión algebraica pues podemos obtener más soluciones de las que la ecuación tiene o puede que la nueva ecuación no sea equivalente a la dada.

En general, es conveniente evitar dividir ambos lados de una ecuación entre una expresión que contenga variables; en lugar de esto debemos factorizar.

Las ecuaciones algebraicas se clasifican según distintos criterios:

- *Según el número de incógnitas*: Ecuaciones con una incógnita, con dos, con tres,… con n incógnitas.
- *Según el término de mayor grado*: Ecuaciones de primer grado (lineales), de segundo grado (cuadráticas), de tercer grado (cúbicas),… de grado n.
- *Según la forma de presentación de las variables*: Ecuaciones enteras, cuando no existe ninguna incógnita en el denominador; fraccionarias, con incógnitas en algún denominador; racionales, si las incógnitas no aparecen dentro de raíces cuadradas, cúbicas, etc., e irracionales, si las incógnitas se presentan dentro de alguna de estas raíces.

En general, una ecuación algebraica de orden *n* posee *n raíces o soluciones*, aunque algunas de ellas pueden estar repetidas e incluso tomar valores complejos. *Las ecuaciones de quinto grado y de grado superior, en el caso general, no pueden ser resueltas por radicales, y normalmente se utilizan métodos numéricos para resolverlas.*

Protocolo general de resolución de ecuaciones:

1. Se eliminan los radicales, caso de que los haya.
2. Se suprimen los signos de agrupación (paréntesis, etc.) efectuando las operaciones indicadas.
3. Se suprimen los denominadores, si los hay, multiplicando ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
4. Se transponen y reducen términos semejantes: simplificando en ambos miembros siempre que sea posible, pasando a un miembro los términos con la incógnita y dejando en el otro todos los demás términos.
5. Despejamos la incógnita, dividiendo por el coeficiente de la incógnita.
6. Es conveniente, y a veces necesario, comprobar el resultado.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una ecuación lineal (o de primer grado) con una incógnita es de la forma:

$$ax+b=0\ ;\ a\neq 0\ ;\ a,b\in\mathbb{R}$$

O cualquier otra ecuación equivalente a ésta. Es decir, es un polinomio de primer grado igualado a cero.

La ecuación anterior tiene una sola raíz: $x=-\dfrac{b}{a}$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Una ecuación cuadrática (o de segundo grado) con una incógnita es de la forma:

$$ax^2+bx+c=0\ ;\ a\neq 0\ ;\ a,b,c\in\mathbb{R}$$

O cualquier otra ecuación equivalente a ésta. Es decir, es un polinomio de segundo grado igualado a cero.

Llamamos **discriminante** a $\Delta=b^2-4ac$; discusión:

- Si D > 0, la ecuación tiene dos soluciones reales resolución:
  $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow\left\{x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right.$$
- Si D = 0, la ecuación tiene dos soluciones coincidentes, esto es, la solución es doble o de multiplicidad 2
  resolución: $x=\dfrac{-b}{2a}\Rightarrow\{x_1=x_2$
- Si D < 0, la ecuación no tiene soluciones reales.

La ecuación es incompleta cuando algún coeficiente es nulo. En estos casos no es necesario utilizar la fórmula general.

$$ax^2+bx=0\Rightarrow x(ax+b)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ ax+b\Rightarrow x_2=-b/a\end{cases}$$

$$ax^2+c=0\quad\Rightarrow\quad ax^2=-c\quad\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{-c/a}$$

Suma *"s"* ***y producto*** *"p"* ***de las dos soluciones*** *o raíces:*

$$s=x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad;\quad p=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Forma canónica *de la ecuación de 2º grado*: $x^2-sx+p=0$

Signo de las raíces*, suponiendo que "a" es positivo:*

- Si "c" es positivo, las dos raíces tienen el mismo signo y opuesto al de "b"
- Si "c" es negativo, las dos raíces tienen signo contrario y la de menor valor absoluto tiene el mismo signo que "b"

Descomposición factorial del trinomio *de segundo grado:*

- Si D > 0 entonces $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$
- Si D = 0 entonces $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)^2$

Forma abreviada *de la ecuación de 2º grado*

Cuando "a" es uno y "b" es par, tomando k la mitad de b podemos utilizar la expresión: $x=-k\pm\sqrt{k^2-c}$

ECUACIONES DE GRADO MAYOR A 2

ECUACIONES BINÓMICAS:

Son las que pueden reducirse a la forma:

$$ax^n + b = 0 \quad ; \quad a, b \neq 0 \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

Estas ecuaciones se resuelven factorizando o calculando la raíz *n-ésima* de a, $x = \pm\sqrt[n]{a}$

1. Si *n* es par y *a* es positivo: hay dos soluciones reales y opuestas.
2. Si *n* es par y *a* es negativo: no hay soluciones reales.
3. Si *n* es impar la ecuación tiene una solución real del mismo signo que el radicando.

ECUACIONES TRINÓMICAS:

Son las que pueden reducirse a la forma:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0 \ ; \ a, b, c \neq 0 \ ; \ n \geq 2 \ ; \ n \in \mathbb{N}$$

Estas ecuaciones se resuelven factorizando o realizando un "**cambio de variable**", tomando $x^n = y$

La ecuación se transforma en una ecuación de segundo grado:

$$ay^2 + by + c = 0$$

Si y_1 e y_2 son dos raíces reales diferentes, la ecuación trinómica equivale al conjunto de ecuaciones binómicas:

$$x = \pm\sqrt[n]{y_1} \quad ; \quad x = \pm\sqrt[n]{y_2}$$

Obtenidas al deshacer el cambio de variable.

ECUACIONES BICUADRADAS:

Son las que pueden reducirse a la forma:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad ; \quad a, b, c \neq 0 \quad ; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Son ecuaciones trinómicas con $n = 2$, es decir, de cuarto grado sin términos de grado impar. Evidentemente las resolvemos como las trinómicas, por cambio de variable o factorizando el polinomio asociado.

ECUACIONES FACTORIZABLES:

Son las que pueden reducirse a la forma:

$$p(x) \cdot q(x) \cdot \ldots = 0 \quad ; \quad \text{con } p(x), q(x), \ldots \text{ polinomios}$$

Son ecuaciones cuyo polinomio asociado puede descomponerse en factores, normalmente de primer o segundo grado, utilizando la regla de Ruffini (y el teorema del resto) o cualquier otra regla para descomponer en factores polinomios.

Es decir, para resolver ecuaciones algebraicas de coeficientes enteros se usa el siguiente teorema:

Para que la fracción irreducible $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) sea raíz de la ecuación $a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$ y a_k de coeficientes enteros, es necesario que el número p sea divisor del término independiente a_0, y el número q sea divisor del coeficiente de mayor grado a_n. Por tanto, si $a_n = 1$ solo es necesario tener en cuenta los divisores del término independiente.

Teorema del factor cero:

Si p y q son expresiones algebraicas, entonces

$$p \cdot q = 0 \ si \ y \ sólo \ si \ \ p = 0 \ o \ bien \ q = 0$$

Es posible encontrar soluciones a este tipo de ecuaciones si se iguala a cero cada uno de los factores (*teorema del factor cero*) y se resuelven las ecuaciones así obtenidas.

ECUACIONES FRACCIONARIAS

Son ecuaciones en la que la incógnita aparece en el denominador de alguna fracción. Es decir, son aquellas equivalentes a una ecuación cuyo primer miembro es un cociente de polinomios y el segundo es 0,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \ ; \ \text{donde } p(x), q(x) \text{ polinomios y } q(x) \neq 0$$

La solución de la ecuación se reduce a resolver $p(x) = 0$ y verificar que sus raíces satisfacen la condición $q(x) \neq 0$

El método para resolver estas ecuaciones es análogo al seguido para resolver ecuaciones enteras; sin embargo, hay que tener en cuenta que, para eliminar sus denominadores, debemos multiplicar por el mínimo denominador común y éste contiene la incógnita. En este caso, una vez halladas las soluciones, no serán válidos aquellos valores que anulan el denominador común.

$$\frac{3x}{2x + x^2} - \frac{1}{x} + \frac{4}{x+2} = 0$$

$$3x - (x+2) + 4x = 0$$

$$3x - x - 2 + 4x = 0$$

$$6x = 2 \iff x = \frac{2}{6} \iff \boxed{x = \frac{1}{3}}$$

Es decir, como a veces aparecen soluciones falsas, **deberemos comprobar todas las soluciones**.

ECUACIONES IRRACIONALES

Son aquellas ecuaciones que contienen la incógnita bajo el signo radical.

La resolución de ecuaciones con radicales cuyo índice es 2, se basa en el siguiente principio:

Si se elevan al cuadrado los dos miembros de una ecuación, se obtiene otra ecuación que, además de tener las soluciones de la primera, puede contener las de una segunda, obtenida al cambiar de signo uno de los miembros de la ecuación dada.

Nota: siempre que la resolución de una ecuación exija elevar a un número **par** sus dos miembros, es preciso **comprobar** si las soluciones obtenidas verifican o no la ecuación propuesta.

Para transformar en racional una ecuación irracional, con uno o más radicales de índice 2, se procede así:

1. Se deja un radical con incógnita en uno de los miembros y todos los demás términos en el otro.
2. Se reducen términos semejantes
3. Se elevan al cuadrado los dos miembros
4. Si hay más radicales con incógnita, se repiten los pasos anteriores tantas veces como sea necesario
5. Resolvemos la ecuación racional obtenida.
6. Comprobamos si realmente son soluciones de la ecuación inicial los valores hallados.

$$x + 1 = 2x - \sqrt{x+1}$$

$$-x + 1 = -\sqrt{x+1}$$

$$(1-x)^2 = \left(-\sqrt{x+1}\right)^2$$

$$1 + x^2 - 2x = x + 1$$

$$x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3) = 0$$

$$\cancel{x = 0} \ \ No \quad ; \quad \boxed{x = 3} \ \ Si$$

ECUACIONES CON UN VALOR ABSOLUTO

Son aquellas ecuaciones que contienen la incógnita dentro del signo de valor absoluto; para finalizar comprobaremos las soluciones.

Por ejemplo, son ecuaciones del tipo $|x - 5| = 3$

$$\text{Si } a, b \in \mathbb{R} \text{ con } b > 0 \Rightarrow |a| = b \iff a = b \text{ o bien } -a = b$$

$$|x-5| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 3 \\ -(x-5) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 5 \\ -x + 5 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 8} \ ó \\ \boxed{x = 2} \end{cases}$$